

CHẪ NG XI

UỶ N NGANG PHẪ NG CÁC THANH THẪ NG

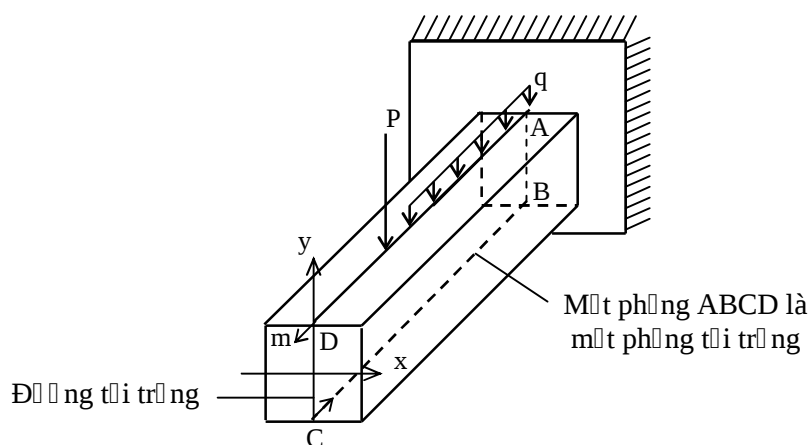
Bài 26. CÁC ĐẪNH NGHĨA VÀ PHÂN LOẪ I-NẪ I LẪ C VÀ BIẪ U ĐẪ NẪ I LẪ C

I. Các đẪnh nghĩa và phân loẪ i

1. ĐẪnh nghĩa

Thanh bẪ uỶ n ngang phẪ ng là thanh chẪ u tác đẪ ng cẪ a hẪ lẪ c phẪ ng (gẪ m nhẪ ng lẪ c vuōng góc vẪ i trẪ c thanh hay nhẪ ng ngẪ u lẪ c) nẪ m trong mẪ t phẪ ng chẪ a trẪ c thanh (mẪ t phẪ ng này gẪ i là mẪ t phẪ ng tẪ i trẪ ng).

Ví đẪ : Các trẪ c truyỶ n đẪ ng, các đẪ m cẪ u, nhà, dẪ n cẪ n cẪ u v.v...



- NgoỶ i lẪ c tác đẪ ng có thẪ là lẪ c tẪ p trung, lẪ c phân bẪ hoỶ c mômen tẪ p trung.
- Thanh chẪ yỶ u chẪ u uỶ n gẪ i là đẪ m.
- TrẪ c cẪ a đẪ m sau khi chẪ u uỶ n cong vỶ n nẪ m trong mẪ t phẪ ng đẪ i xỶ ng cẪ a đẪ m thì sỶ uỶ n đó đẪ i c gẪ i là uỶ n phẪ ng.

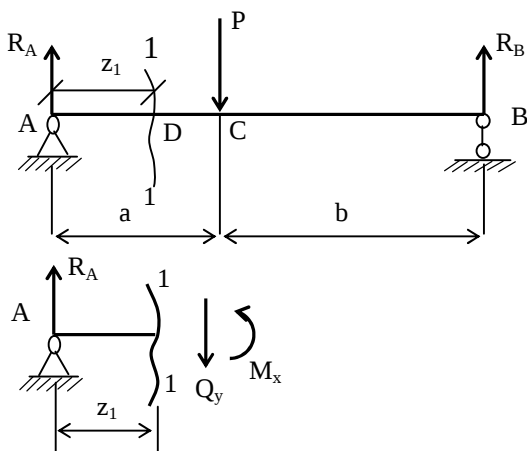
2. Phân loẪ i

Ta chia uỶ n phẪ ng làm hai loỶ i:

- UỶ n thuỶ n túy phẪ ng.
- UỶ n ngang phẪ ng.

II. Nội lực – Quy ước dấu nội lực

1. Nội lực



Xét dầm AB chịu tải như hình vẽ:

- Đầu tiên phải xác định đúng các phần tử của các gối đỡ A và B

Từ phương trình cân bằng tĩnh học

$$\sum M_A = R_B l - Pa = 0$$

$$\sum M_B = -R_A l + Pb = 0$$

$$R_B = \frac{P \cdot a}{l} ; R_A = \frac{P \cdot b}{l}$$

- Dùng mặt cắt 1 – 1 cắt thành hai phần tại điểm D. Khi xét sự cân bằng của phần trái. Để phần trái cân bằng thì trên mặt cắt ngang của dầm xuất hiện các nội lực Q_y , M_x .

Q_y đúng gọi là lực cắt

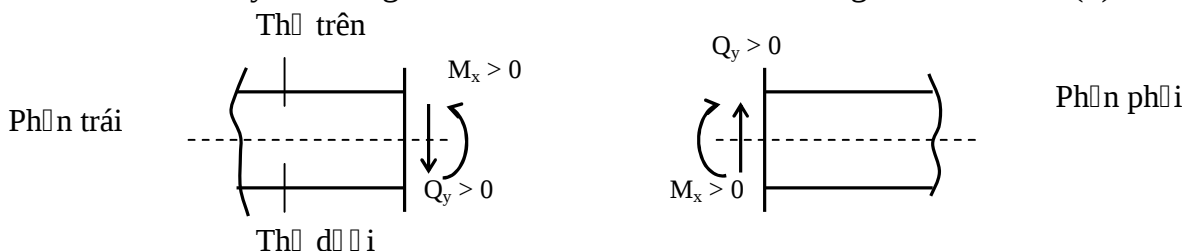
M_x đúng gọi là mômen uốn $Q_y = R_A$, $M_x = R_A \cdot z_1$

* Dầm chịu uốn ngang phẳng khi trên mặt cắt ngang của dầm, nội lực chỉ có lực cắt Q_y và mômen uốn M_x .

2. Quy ước dấu

+ Lực cắt Q_y có dấu (+) nếu ngoại lực sinh ra nó tác động ở phần dầm đó xét có khuynh hướng làm cho phần dầm đó quay thu hẹp chiều kim đồng hồ quanh trục tâm mặt cắt. Ngược lại Q_y có dấu (-)

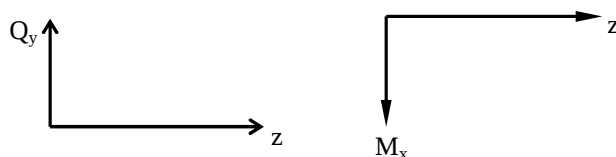
+ Mômen uốn M_x có dấu (+) nếu ngoại lực sinh ra nó có tác động ở phần dầm đó xét có khuynh hướng làm cho thanh dầm bị kéo. Ngược lại có dấu (-)



III. Biểu đồ nội lực

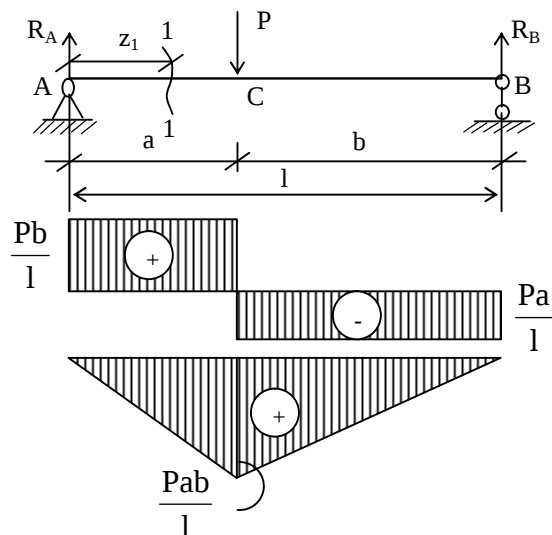
Biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của lực cắt và mômen uốn dọc theo trục của dầm. Nhờ nó ta dễ dàng tìm được các mặt cắt và mômen uốn có trị số lớn nhất. Các mặt cắt đó thường là mặt cắt nguy hiểm. Sau này chúng ta sẽ tính toán để kiểm tra.

Khi vẽ đồ thị ta quy ước như sau:



* Ví dụ

Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn cần đặt trên hai khớp bản lề A và B, chịu tải trọng P như hình vẽ



Giải

a. Xác định phản lực tại điểm tựa A và B

Từ phương trình cân bằng tĩnh học

$$\sum M_A = R_B l - Pa = 0$$

$$\sum M_B = -R_A l + Pb = 0$$

Suy ra: $R_B = \frac{Pa}{l}$; $R_A = \frac{Pb}{l}$

b. Biểu đồ lực cắt Q_y

- Đoạn AC : $Q = R_A = \frac{Pb}{l}$

- Đoạn BC : $Q = -R_B = -\frac{Pa}{l}$

c. Biểu đồ mômen uốn M_x

- Đoạn AC, tải mặt cắt 1 – 1 (trái)

$M_x = R_A \cdot z_1$ với $0 \leq z_1 \leq a$ (M_x là hàm bậc nhất theo z , cần xác định hai điểm đầu cuối):

$$\left. \begin{aligned} z_1 = 0 &\Rightarrow M_x = 0 \\ z_1 = a &\Rightarrow M_x = \frac{Pab}{l} \end{aligned} \right\}$$

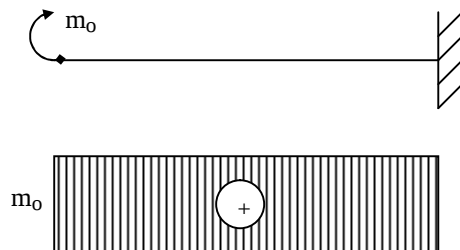
- Đoạn CB, tải mặt cắt 2 – 2 (xét phần phải)

$$\left. \begin{aligned} M_x = R_B \cdot z_2 \text{ với } 0 \leq z_2 \leq b \\ z_2 = 0 &\Rightarrow M_x = 0 \\ z_2 = b &\Rightarrow M_x = \frac{Pab}{l} \end{aligned} \right\}$$

Bài 27. ĐỀ M CHẾ UỶ N PHẪNG THUỶ N TÚY

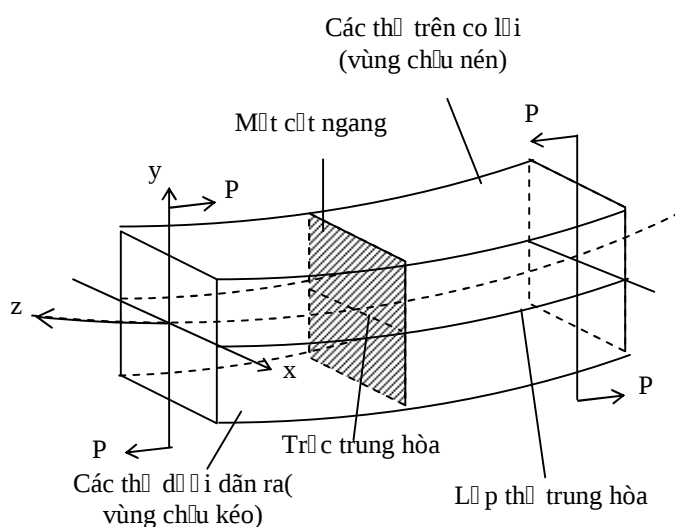
I. Định nghĩa

Môđm gĩ là uỹ n thuỹ n túy phĩng khi trên mĩt cĩt ngang cĩ đĩm chĩ có mĩt thành phĩn nĩi lĩc là mômen uỹ n nĩm trong mĩt phĩng tĩi trĩng.



II. ỹng suất pháp trên mĩt cĩt ngang

Xét mĩt đĩm có mômen uỹ n tác đĩng ỹ hai đĩu, ta thĩy:



- Khi đĩm biĩn đĩng, các thĩ trên co lĩi, các thĩ dĩĩi dĩn ra. Có mĩt lĩp thĩ không bĩ co cũng không bĩ dĩn gĩi là lĩp thĩ trung hòa. Giao tuyĩn cĩ a lĩp thĩ trung hòa vĩi mĩt cĩt ngang đĩĩc gĩi là trĩc trung hòa, trĩc trung hòa đĩĩc coi là thĩng nhĩ thuyĩt biĩn đĩng nhĩ.
- Kĩt luỹn: Trên mĩt cĩt ngang cĩ đĩm chĩu uỹ n chĩ có ỹng suất pháp σ .

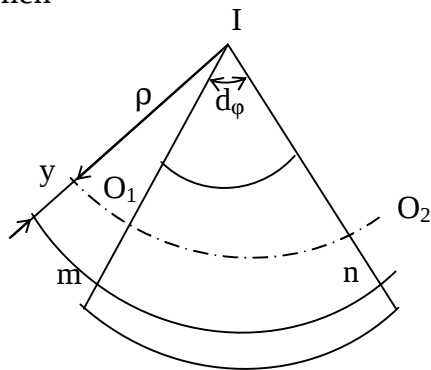
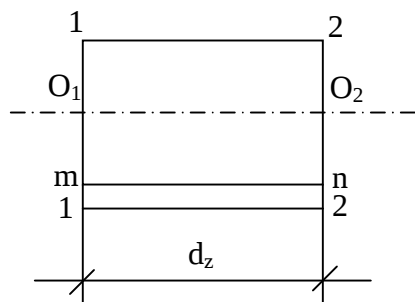
Theo đĩnh luỹt Hooke, gĩĩa ỹng suất pháp σ và biĩn đĩng đĩc tĩĩng đĩi ϵ có liĩn hĩ nhĩ sau:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (*)$$

Nĩu biĩt đĩĩc biĩn đĩng, chúng ta đĩ dĩng tìm đĩĩc sĩ phĩn bĩ ỹng suất trên mĩt cĩt ngang.

Muĩn vĩy ta xét mĩt đĩn đĩm d_z đĩĩc cĩt bĩi hai mĩt cĩt 1 – 1, 2 – 2. Sau khi biĩn đĩng, hai mĩt cĩt này tĩĩo vĩi nhau mĩt gĩc đĩp. Gĩĩp là bán kĩnh cong cĩ a thĩ trung hòa O_1O_2 .

Vì trục trung hòa không biến dạng nên



$$\widehat{O_1O_2} = d_z \Rightarrow O_1O_2 = \rho \cdot d\varphi$$

Xét biến dạng của thanh mn cách trục trung hòa một khoảng cách y. Chiều dài của thanh này trước khi biến dạng là $mn = d_z = \rho d\varphi$

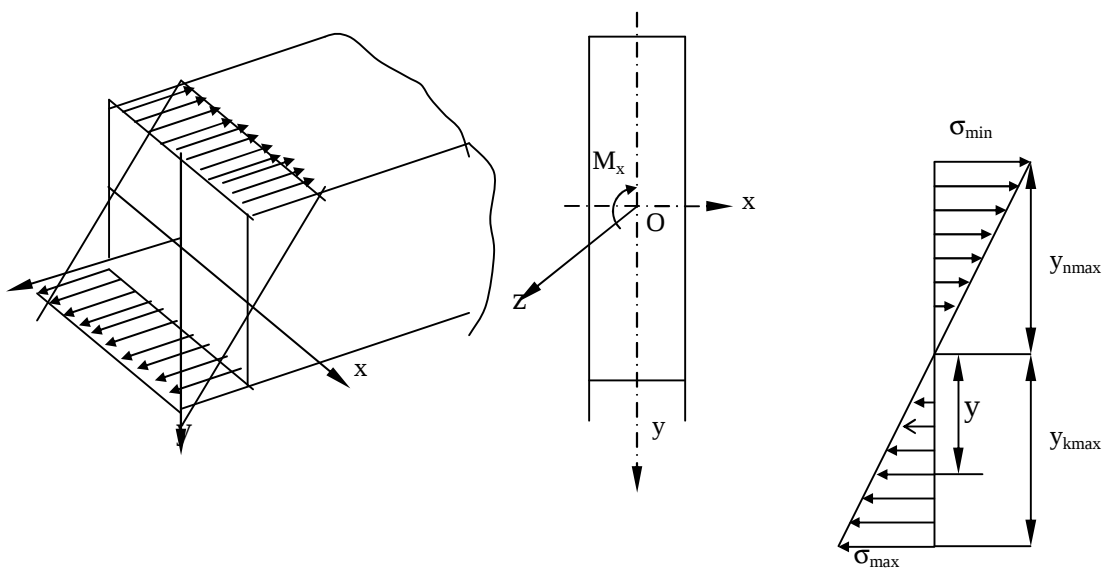
Và sau khi biến dạng $mn = (\rho + y) d\varphi$

Biến dạng dọc theo trục của thanh biến

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

Thay ε vào (*) $\sigma = E \frac{y}{\rho}$ (**)

Tại một mặt cắt ngang bán kính ρ có trục xác định, E là hằng số. Vậy qui luật phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang là phẳng.



Giao tuyến của mặt phẳng ứng suất với mặt cắt chính là trục trung hòa. Rõ ràng ứng suất pháp trên các điểm ứng thẳng song song với trục trung hòa có trị số như nhau. Do đó ta có thể vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp đơn giản như trên.

Qua biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt ngang, ta thấy:

- Trên mặt cắt ngang chia làm hai miền: miền chịu kéo và miền chịu nén
- Các điểm có trục song song với trục trung hòa

III. Biểu thức liên hệ giữa ứng suất pháp và thành phần mômen uốn nội lực

Xét mặt cắt ngang có mômen uốn M_x , ta có:

$$M_x = \int_F \sigma \cdot dF = \frac{E}{\rho} \int_F y \cdot dF$$

Gọi $J_x = \int_F y^2 \cdot dF$ là mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa.

$$\text{Vậy: } M_x = \frac{E}{\rho} J_x \quad \text{hay} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot J_x}$$

So sánh với (***) ta suy ra công thức ứng suất pháp trên mặt cắt ngang như sau:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y$$

$$\text{Nếu } y \rightarrow y_{\max} \Rightarrow \sigma_{\min} = -\frac{M_x}{J_x} y_{\max} = -\frac{M_x}{W_x^n}$$

$$y \rightarrow y_{\max} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x^k}$$

(1) Đối với mặt cắt ngang có trục trung hòa cũng là trục đối xứng: mặt cắt hình chữ nhật, hình tròn, chữ I v.v... thì $y_{\max} = y_{\min}$

$$\Rightarrow W_x^k = W_x^n$$

$$\text{Do đó, ứng suất kéo và nén lớn nhất là: } \sigma_{\max/\min} = \pm \frac{M_x}{W_x}$$

W_x : Mômen chống uốn của mặt cắt ngang (là mặt đối xứng hình học của mặt cắt), đơn vị: m^3

Khi W_x càng lớn $\rightarrow$ ứng suất phát sinh trên dầm càng nhỏ $\rightarrow$ khả năng chống uốn của dầm càng lớn.

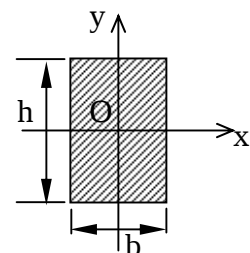
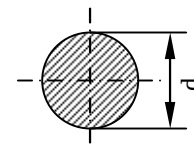
$$+ \text{ Mặt cắt hình tròn } W_x = 0,1d^3$$

$$+ \text{ Mặt cắt hình tròn rỗng } W_x = 0,1 D^3 (1 - \alpha^4)$$

$$\text{Với } \alpha = \frac{d}{D}$$

$$+ \text{ Mặt cắt hình chữ nhật } W_x = \frac{bh^2}{6} \text{ hoặc } W_y = \frac{b^2h}{6}$$

$$+ \text{ Mặt cắt vuông } W_x = \frac{a^3}{6}$$



(2) Đ i v i các m t c t ngang không đ i x ng thì $y_{k\max} \neq y_{n\max} \Rightarrow W_x^k = W_x^n$

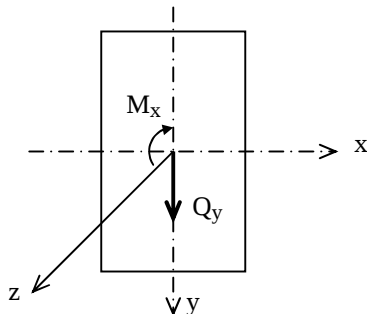
$$\text{Do đó } \sigma_{\min} = -\frac{M_x}{W_n} \text{ v i } W_k = \frac{J_x}{y_{k\max}}$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{M_x}{\omega_n} \text{ v i } W_n = \frac{J_x}{y_{n\max}}$$

Bài 28. DẪN M CHẪU UỶ N NGANG PHẪNG

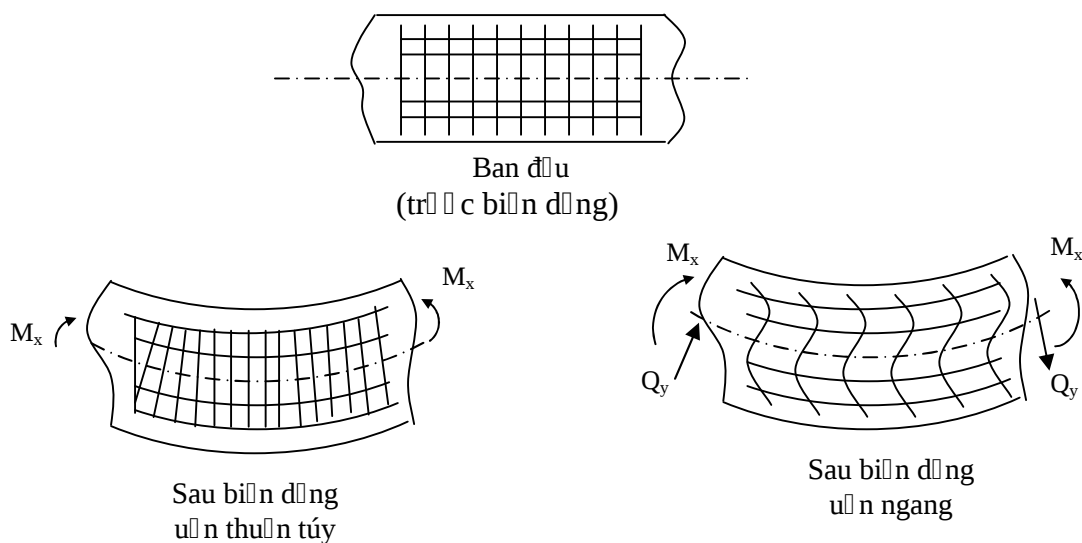
I. Định nghĩa

Một dầm gọi là uốn ngang phẳng khi trên mặt cắt ngang của nó có hai thành phần nội lực là lực cắt Q_y và mômen uốn M_x (hoặc Q_x và M_y)



II. Biến dạng trượt pháp trên mặt cắt ngang

Khi bị uốn ngang trên mặt cắt ngang của thanh không nhúng có biến dạng trượt pháp do mômen uốn mà còn có biến dạng trượt tiếp do lực cắt gây ra. Nếu tách ra từ điểm A trên mặt cắt ngang của thanh một phần tử hình hộp chữ nhật (có các mặt song song với mặt tải đặt) ta sẽ thấy phần tử đó bị biến dạng trượt, các góc vuông của nó không còn vuông nữa. Hiện tượng này cùng với hiện tượng trượt bị uốn cong, làm cho các mặt cắt ngang ban đầu (trước khi chịu tải) không còn phẳng nữa sau khi bị uốn ngang.



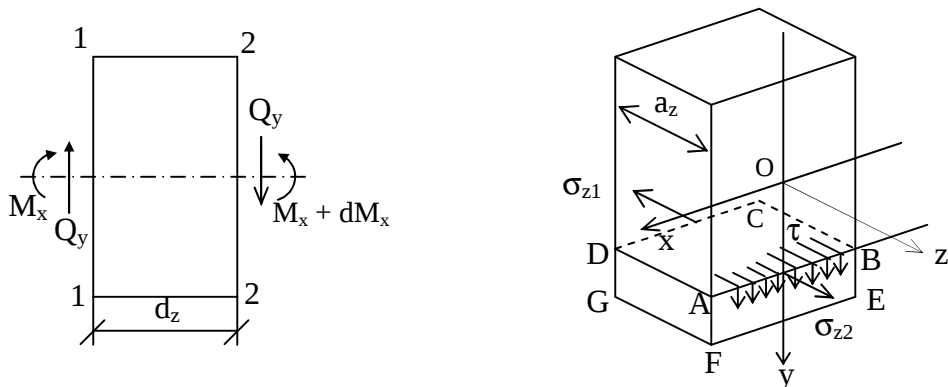
Mặc dù vậy theo những kết quả nghiên cứu sâu hơn của các học vật rắn biến dạng, công thức xác định biến dạng trượt pháp trên mặt cắt ngang là: $\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \cdot y$ vẫn đúng đối với trường hợp hình hộp chữ nhật của thanh là hình chữ nhật và biểu thức mômen uốn có dạng bậc nhất. Trong các trường hợp khác công thức đó vẫn dùng được với sai số không lớn.

Như vậy, chúng ta còn phải tìm công thức tính biến dạng trượt tiếp do lực cắt Q_y gây nên.

III. ăng suất cắt trên mặt cắt ngang

Đồ cho đôn giốn mặt cắt ngang cĩa thanh là mặt đĩi chĩ nhĩt hĩp (nghĩa là chiũu rĩng b nhĩ hĩn chiũu cao h và biũu đĩ mĩmen uĩn cĩ đĩng bĩc nhĩt).

Tách khĩi thanh mặt đĩn vĩ cĩng bĩng hai mặt cắt 1 – 1 và 2 – 2 cách nhau mặt khoĩng d_z , sau đĩ bĩng mặt cắt ABCD song song và cách mặt phĩng Oxyz mặt khĩang y chia đĩn thanh này thành hai phĩn và xét phĩn khĩng chĩ c gĩc O (ABCDEFGH)



Gĩ σ_{z1} và σ_{z2} là ăng suất pháp trên các mặt cắt 1 – 1 và 2 – 2, $AB = b(y)$ và F_y là diĩn tích cĩa mặt cắt ABEF. Ta cĩ :

$$\sigma_{z1} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y \quad \sigma_{z2} = \frac{M_x + dM_x}{J_x} \cdot y$$

Lĩc đĩc trên các mặt F cĩa phĩn thanh đĩng xét

$$N_{z1} = \int_{F_y} \sigma_{z1} \cdot dF = \frac{M_x}{J_x} \int_{F_y} y dF$$

$$N_{z2} = \int_{F_y} \sigma_{z2} \cdot dF = \frac{M_x + dM_x}{J_x} \int_{F_y} y dF$$

Vĩ $dM_x \neq 0$ nên $N_{z1} \neq N_{z2}$ do đĩ trên mặt cắt ABCD phĩi cĩ nĩi lĩc T thĩa mĩn đĩũ kiĩn cĩn bĩng.

$$\Sigma Z = 0 \text{ nghĩa là } N_{z2} - N_{z1} = T$$

Nhĩ vĩy trên mặt cắt ABCD phĩi cĩ ăng suất tỉĩp τ_{yz} .

Vĩi mặt cắt là đĩi hình chĩ nhĩt hĩp, cĩ thĩ giĩs ăng suất tỉĩp τ_{yz} phĩn bĩ đĩũ theo bĩ rĩng cĩa mặt cắt. Ta cĩ :

$$T = \tau_{yz} \cdot b(y) d_z$$

$$\Rightarrow \frac{M_x + dM_x}{J_x} \int_{F_y} y dF - \frac{M_x}{J_x} \int_{F_y} y dF = \tau_{yz} b(y) d_z$$

$$\text{hay } \frac{dM_x}{J_x} \int_{F_y} y dF = \tau_{yz} b(y) d_z$$

$$\Rightarrow \frac{M_x + dM_x}{J_x} \int_{F_y} y dF - \frac{M_x}{J_x} \int_{F_y} y dF = \tau_{yz} b(y) d_z$$

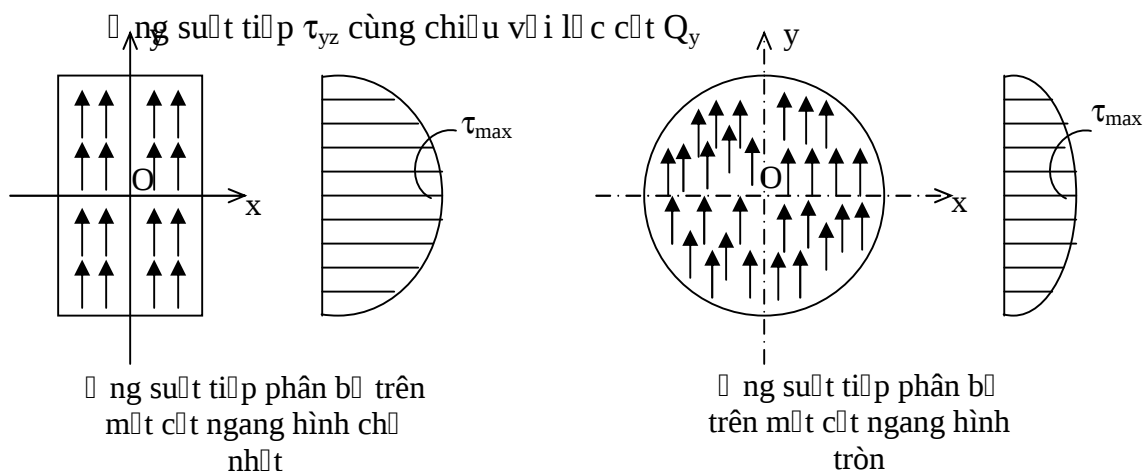
$$\text{hay } \frac{dM_x}{J_x} \int_{F_y} y dF = \tau_{yz} b(y) d_z$$

$S_x(y)$ là mômen diện tích cặp mặt (môment tĩnh) của diện tích F_y đối với trục trung hòa x. Vì y cùng ta sẽ có biểu thức:

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y S_x(y)}{J_x b(y)}$$

Công thức này được gọi là công thức Jurovsky

Đang suất tiếp τ_{yz} cùng chiều với lực cắt Q_y



Đang suất tiếp phân bố trên mặt cắt ngang hình chữ nhật

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}$$

Q : giá trị tuyệt đối của lực cắt (N)

Đang suất tiếp phân bố trên mặt cắt ngang hình tròn

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}$$

F : diện tích mặt cắt ngang (m^2)

IV. Điều kiện bền đối với dầm chịu uốn ngang phẳng

Đối với dầm chịu uốn ngang phẳng, trên mặt cắt ngang có các ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Nhưng theo nguyên lý cân bằng thì ứng suất tiếp không đáng kể nên có thể bỏ qua.

1. Điều kiện bền

a. Đối với vật liệu dẻo

$[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma]$ nên trong hai trường hợp $\sigma_{\max}$ và $\sigma_{\min}$ ta chỉ cần chọn ứng suất nào có giá trị tuyệt đối lớn nhất để so sánh với $[\sigma]$

$$\text{Ta có : } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

b. Đối với vật liệu giòn: có $[\sigma_k]$ khác $[\sigma_n]$ nên:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x^k} \leq [\sigma_k]$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{\max}}{W_x^n} \leq [\sigma_n]$$

Trên cùng hình mặt cắt đối xứng trục trung hòa, chữ nhật, tròn, vuông v.v ... thì $\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$ và vì $[\sigma_k] < [\sigma_n]$ nên điều kiện bền là:

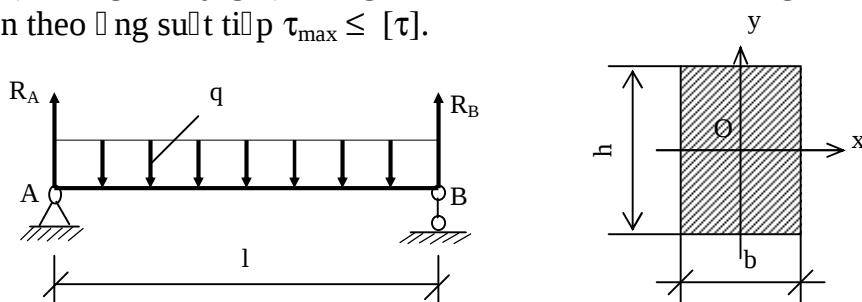
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma_k]$$

2. Các bài toán cần biết

- Bài toán kiểm tra bền
- Bài toán chọn mặt cắt ngang
- Bài toán tính tải trọng cho phép

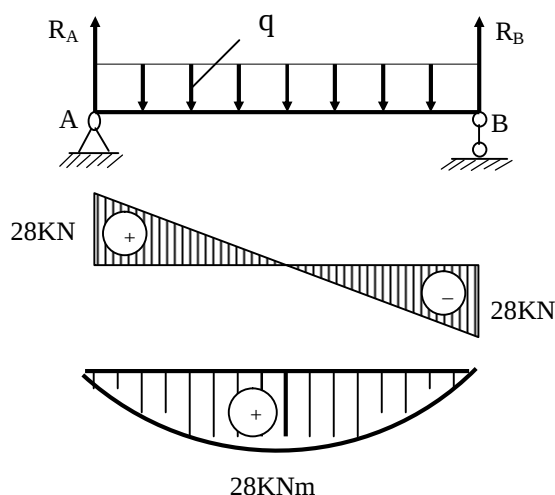
* Chú ý: Trong mặt số ít trục ngang hình, tải mặt cắt ngang có lực cắt Q_y lớn so với mômen uốn M_x (dầm ngắn hay gối) thì ngoài việc tính bền theo ứng suất pháp, ta phải kiểm tra bền theo ứng suất tiếp $\tau_{\max} \leq [\tau]$.

* Ví dụ



Mặt dầm bằng gỗ chịu tải trọng phân bố đều $q = 14 \text{ KN/m}$. Dầm có chiều dài $l = 4 \text{ m}$ mặt cắt ngang dầm hình chữ nhật với $h = 27 \text{ cm}$, $b = 17 \text{ cm}$, ứng suất cho phép của gỗ là $[\sigma] = 10 \text{ MN/m}^2$, $[\tau] = 2 \text{ MN/m}^2$. Hãy kiểm tra bền của dầm.

Giải



* Tính nội lực và vẽ biểu đồ nội lực

$$R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{14 \cdot 4}{2} = 28 \text{ kN}$$

Hợp lực của q là $Q = ql$

- Mômen của cột có mômen uốn lớn nhất là giá trị

$$M_{\max} = R_A \cdot \frac{1}{2} - q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 28 \text{ KNm}$$

- Còn với ứng suất thì mômen ngang tại các gối đỡ là mômen nguy hiểm

$$Q_{\max} = R_A = R_B = 28 \text{ KN}$$

$$Q_{\min} = R_A - q \cdot \frac{1}{2} = 0 \text{ (giá trị)}$$

(Tổng quát với dầm đỡ liên tiếp do trên hai gối đỡ chịu tải trong phân bố đều toàn phần ta luôn có $Q_{\max} = \frac{ql}{2}$ và $M_{\max} = \frac{ql^2}{4}$)

- Mômen chống uốn của mômen ngang của dầm

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{17.27^2}{6} = 2,07.10^3 \text{ cm}^3 = 2,07.10^{-3} \text{ m}^3$$

- Diện tích mômen ngang của dầm

$$F = 27.17 = 459 \text{ cm}^2 = 459 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

- * Kiểm tra bền theo ứng suất pháp

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{28.10^3}{2,07.10^{-3}} = 13,5.10^6 \text{ N/m}^2 > [\sigma] = 10.10^6 \text{ N/m}^2$$

- * Kiểm tra bền theo ứng suất tiếp

$$\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_{\max}}{F} = 1,5 \cdot \frac{28.10^3}{459.10^{-4}} = 0,915.10^6 \text{ N/m}^2$$

Kết luận: Dầm không đảm bảo đủ bền

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Thế nào là thanh chịu uốn ngang phẳng? Cho ví dụ.
2. Lực cắt Q và mômen uốn M_x là gì? Qui tắc xác định trục Q và M_x .
3. Trình bày sơ phân bố và công thức tính ứng suất pháp trên mômen cắt ngang của dầm chịu uốn phẳng thuần túy.
4. Vẽ và giải thích công thức tính mômen chống uốn của các mômen cắt hình chữ nhật, tròn đặc, tròn rỗng, vuông.
5. Trình bày sơ phân bố và vẽ công thức tính ứng suất pháp trên mômen cắt ngang của dầm chịu uốn ngang phẳng.
6. Ứng suất tiếp do thành phần nào của lực nào gây nên? Phân bố như thế nào trên mômen cắt ngang?
7. Trình bày điều kiện bền của dầm dựa vào ứng suất pháp, công thức tính ba bài toán cơ bản.
8. Khi nào cần kiểm tra điều kiện bền về ứng suất tiếp?